

## 1. Einleitung

Das Chaos – gemeint ist das Chaos in der Physik - hat mich schon vor Jahren fasziniert: Ein Eintrag in meinem Protokollbuch aus dem Jahr 1993 (Abbildung 1) zeigt einen elektromagnetischen Schwingkreis, der eine Diode als nichtlineares Element enthält. An dem wollte ich die Periodenverdopplung studieren, die dem Chaos vorausgeht. Offenbar ohne Erfolg, denn weitere Einträge fehlen. Das seltsame Verhalten nichtlinearer Schwingungen, die Periodenverdopplung, hatte der US-amerikanische Physiker Mitchell Jay Feigenbaum<sup>1,2</sup> vorhergesagt.

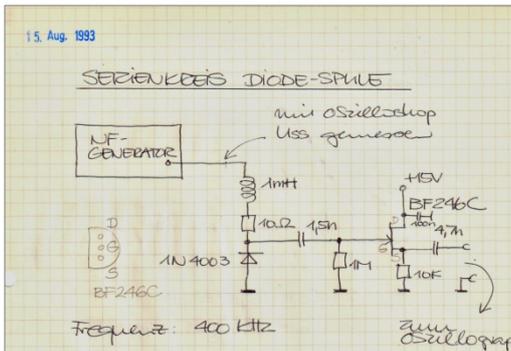


Abbildung 1 Vor 30 Jahren schon einmal versucht, zum Chaos vorzudringen (ohne Erfolg): Eintrag ins Protokollbuch vom 15.08.1993.

Meine Messungen damals waren nicht präzise genug. Jetzt ein neuer Versuch – Versuch im wahrsten Sinn des Wortes.

## 2. Etwas Theorie

Ein einfacher Weg ins (deterministische) Chaos führt über die Iteration der quadratischen Funktion

$$(1) \quad x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) .$$

mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  und dem Parameter  $r$  ( $0 < r < 4$ ). Die Funktion ist reellwertig, der Anfangswert  $x_0$  auf das Intervall  $0 < x_0 < 1$  beschränkt. Seit den Arbeiten des amerikanischen Physikers Feigenbaum<sup>1</sup> weiß man, dass die Funktionswerte  $x_n$  für  $n \rightarrow \infty$  je nach dem Wert von  $r$  unterschiedliches Grenzverhalten zeigen: Für  $0 < r < 3$  streben alle Anfangswerte aus  $0 < x_0 < 1$  einem einzigen Grenzwert zu, bei  $r = 3$  spaltet sich dieser in zwei Grenz- oder besser Häufungswerte auf, bei etwas größerem  $r$  in 4, dann weiter in 8, nochmals weiter in 16, in 32, usw. Häufungswerte. Trägt man die Häufungswerte in Abhängigkeit von  $r$  in einem Koordinatensystem auf, entstehen Kurven, die sich fortlaufend zweifach gabeln. Sie bestehen aus Zweifach-Gabelungen (»Forken«) oder – lateinisch und damit wissenschaftlich ausgedrückt – aus »Bifurkationen«.

Die Bifurkationen erfolgen in immer kürzeren Abständen. Oberhalb von  $r_\infty \approx 3,57$  hören sie ganz auf. Die Häufungswerte zeigen jetzt keinerlei Regelmäßigkeit mehr. Der Bereich zwischen  $r_\infty$  und  $r = 4$  wird deshalb »Chaos« genannt. Im Gebiet des Chaos ist das Grenzverhalten der Iteration extrem komplex. Es gibt jedoch »Fenster«, das sind Intervalle von  $r$ , in denen eine ungerade Anzahl von Häufungswerten erscheinen. Abbildung 2 zeigt unser Bifurkationsdiagramm für Parameterwerte zwischen  $r = 2,8$  und  $r = 4$ . Die erste Bifurkation bei  $r_1 = 3$  ist deutlich zu erkennen, die zweite folgt bei  $r_2 \approx 3,45$  und die dritte schon bei  $r_4 \approx 3,54$  (senkrechte rote Linien). Kurz dahinter, bei  $r_\infty \approx 3,57$ , beginnt das Chaos. Im Chaos ist die Lage des Fensters mit drei Häufungswerten angedeutet (senkrechte grüne Linie bei  $r_3 \approx 3,84$ ).

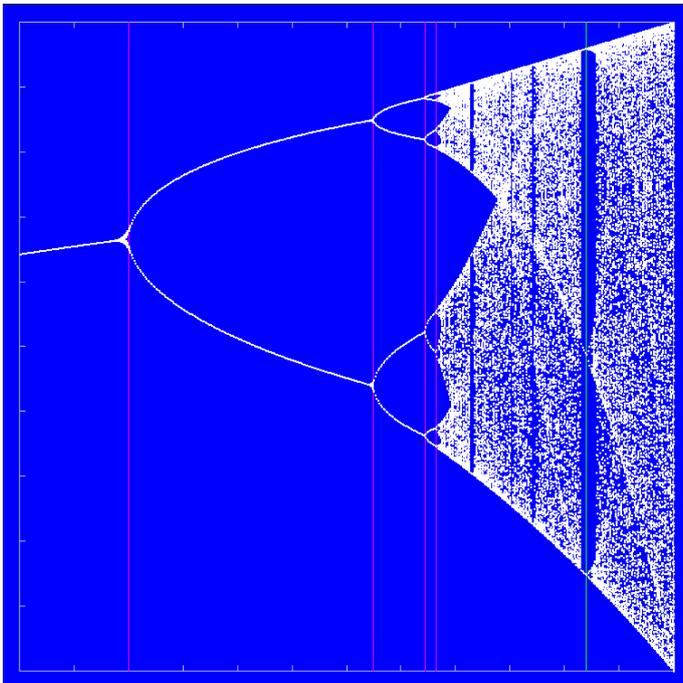


Abbildung 2 Feigenbaum-Diagramm. Nach rechts ist der Parameter  $r$  aufgetragen, nach oben der durch Iteration bestimmte Funktionswert  $x_n (n \rightarrow \infty)$ . Der Grenzwert unterscheidet sich nur wenig vom Wert  $x_n$  für große  $n$ . Deshalb ist im Diagramm der nach ausreichend vielen Iterationsschritten ( $n > 800$ ) ermittelte Wert eingetragen - als weißer Punkt. Die senkrechten roten Linien kennzeichnen die Stellen  $r_i$ , an denen die ersten Bifurkationen erfolgen:  $r_1 = 3,0$ ,  $r_2 = 3,449$ ,  $r_3 = 3,544$  und  $r_4 = 3,564$ . Bei  $r \approx 3,7$  beginnt das Chaos. Die grüne Linie markiert die Stelle eines »Fensters« im Chaosgebiet, bei etwa  $r = 3,84$ .

Die genauen Werte des Parameters  $r_i$ , bei denen die Bifurkationen erfolgen ( $i = 1$  bezeichnet die erste Bifurkation,  $i = 2$  die zweite, usw.), sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1 Werte des Parameters  $r_i$  in Gleichung (1), bei denen die Bifurkation erfolgt ( $i = 1$  bezeichnet die erste Bifurkation,  $i = 2$  die zweite, usw.)

$i$	$r_i$
1	3,0000000
2	3,4494897
3	3,5440903
4	3,5644073
5	3,5687594

Feigenbaum<sup>1,2</sup> zeigte, dass die Abstände  $r_{i+1} - r_i$  zwischen aufeinanderfolgenden Bifurkationen einem Gesetz unterliegen: der Quotient

$$(2) \quad \delta_i = \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+2} - r_{i+1}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

strebt für  $i \rightarrow \infty$  dem Grenzwert  $\delta_\infty = 4,6692\dots$  zu, der nach ihm (Feigenbaum) benannten Konstanten. Aus den Werten  $r_i$  in Tabelle 1 folgen nach dieser Gleichung die Quotienten  $\delta_1$  bis  $\delta_4$  in Tabelle 2. Die Zahl  $\delta_4 = 4,6686\dots$  kommt dem Grenzwert schon recht nahe.

Tabelle 2 Quotienten  $\delta_i$  nach Gleichung (2).  $\delta$  ist das Verhältnis der Differenzen aufeinanderfolgender Bifurkationswerte  $r_i$ .

$i$	$r_i$	$\delta_{i-1}$
1	3,0000000	-
2	3,4494897	4,7514
3	3,5440903	4,6562
4	3,5644073	4,6683
5	3,5687594	4,6686

Die Häufungswerte bilden Zyklen. Nach der ersten Bifurkation ist dies ein Zweier-Zyklus, das heißt, ein Wechsel zwischen zwei Zahlenwerten, für  $r = 3,2$  beispielsweise zwischen  $x_{1\infty} = 0,5130\dots$  und  $x_{2\infty} = 0,7994\dots$ . Nach der zweiten Bifurkation besteht der Zyklus aus vier periodisch durchlaufenen Werten, für  $r = 3,5$  zum Beispiel aus  $x_{\infty 1} = 0,3828\dots$ ,  $x_{\infty 2} = 0,8269\dots$ ,  $x_{\infty 3} = 0,5008\dots$  und  $x_{\infty 4} = 0,8749\dots$ . Mit jeder Bifurkation verdoppelt sich die Periodenlänge.

Bifurkation und Periodenverdopplung sind für den Weg ins Chaos charakteristisch. Sie treten nicht nur in der Theorie auf. Wir zeigen im Folgenden, dass sie auch in einem physikalischen Experiment beobachtet werden.

### 3. Aufbau und Messmethode

Ein »reales« physikalisches System, in dem Periodenverdopplung und Chaos nach der Theorie von Feigenbaum stattfindet, ist ein nichtlinearer elektrischer Schwingkreis, der zu erzwungenen Schwingungen angeregt wird. Er wird in der Literatur<sup>3,4,5,6</sup> mehrfach behandelt und besteht aus einem ohmschen Widerstand  $R$ , einer Spule als Induktivität  $L$  und einer Silizium-Diode in Serienschaltung. Die Diode wirkt in Sperrrichtung als Kapazität  $C$ , in Durchlassrichtung als Konstant-Spannungsquelle, zumindest näherungsweise.

Die Schaltung wird mit einem sinusförmigen Wechselstrom der Frequenz  $f_I$  gespeist. Der Kreis schwingt bei kleiner Wechselspannungsamplitude, wie bei erzwungenen Schwingungen erwartet, mit der Frequenz  $f_I$  des eingespeisten Signals – das heißt, mit einer einzigen Frequenz. Mit größer werdender Amplitude macht sich die Nichtlinearität des Kreises bemerkbar, verursacht durch die gekrümmte Kennlinie der Diode in Sperrrichtung<sup>7,8,9</sup>. Dadurch entstehen im Schwingungsspektrum zusätzliche Frequenzen. Von diesen interessieren hier die *Subharmonischen*, also diejenigen *unterhalb* der Anregungsfrequenz. Zunächst erscheint die Subharmonische mit  $f_I/2$ , also die mit der Hälfte der Anregungsfrequenz und damit doppelten Periode. Bei weiterer Erhöhung der Amplitude entsteht eine Schwingung mit einer vierfach längeren Periode. Im Frequenzspektrum macht sie sich durch zusätzliche Linien bei den Frequenzen  $f_I/4$  und  $3f_I/4$  bemerkbar. Das Entstehen neuer Perioden mit wachsender Amplitude setzt sich fort: Die nachfolgende, wiederum doppelt längere Periode erzeugt Frequenzanteile mit dem Abstand  $f_I/8$  – im Spektrum also zusätzliche Linien bei  $f_I/8$ ,  $3f_I/8$ ,  $5f_I/8$  und  $7f_I/8$ . Dieses Verhalten schreitet fort und endet schließlich in einer chaotischen Verteilung der Schwingungsfrequenzen.

Die Theorie sagt vorher, dass die Spannungsschwellen  $U_S$  zur Erzeugung jeweils doppelter Periodenzahl Gleichung (2) folgen. Das heißt, die Variablen  $r_i$  in dieser Gleichung entsprechen den Werten von  $(U_S)_i$ , bei denen die sich die Periode das  $i$ -te Mal verdoppelt. Es gilt also

$$(3) \quad \delta_i = \frac{(U_S)_{i+1} - (U_S)_i}{(U_S)_{i+2} - (U_S)_{i+1}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Mein Experiment findet auf Hobby-Niveau statt, das Ziel ist entsprechend bescheiden: es soll die Periodenverdopplung demonstrieren und soweit möglich deren Spannungsschwellen  $U_S$  bestimmen.

Die Schaltung besteht aus nur drei Bauelementen. Als Diode wird in der Literatur vielfach der Typ 1N4007 verwendet – offenbar nicht ohne Grund. Meine Schaltung erhält also auch eine 1N4007-Diode. Bleibt die Suche nach geeigneten Werten für Widerstand und Induktivität. Als Anregungsfrequenz  $f_I$  erschien mir ein Wert zwischen 50 und 200 kHz sinnvoll. Für diesen Frequenzbereich stellten sich, zusammen mit der 1N4007, als passend heraus  $R = 100 \Omega$  und  $L = 8,2 \text{ mH}$ .

Abbildung 3 zeigt das Schaltbild der Messanordnung. Sie besteht aus dem Schwingkreis, einem Funktionsgenerator (FG) als Signalquelle, einem Oszilloskop (OZ) zur Darstellung der Spannung  $U_D$ , die an der Diode anliegt, und einem Wechselstrom-Vielfachinstrument (VC), das die Spannung  $U$  (rms-Wert) des vom Funktionsgenerator gelieferten Wechselstroms anzeigt. Periodenverdopplung und Chaos beobachtet man an der Diodenspannung  $U_D$ . Um den Effekt zweifelsfrei zu zeigen, wird  $U_D$  – zusätzlich

zur Darstellung im Oszilloskop – in einem Spektrum-Analysator (AN) nach Frequenzen sortiert und das Spektrum auf dem Bildschirm eines Rechners dargestellt.

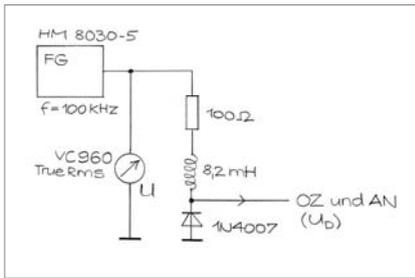


Abbildung 3 Schaltbild. FG Funktionsgenerator ( $f = 100 \text{ kHz}$ ), VC 960 Digital-Voltmeter (TrueRms), OZ Oszillograf, AN Spektrum-Analysator.

Die Schaltung wurde auf einer Experimentierplatine (Hirschmann XP101) aufgebaut (Abbildung 4).

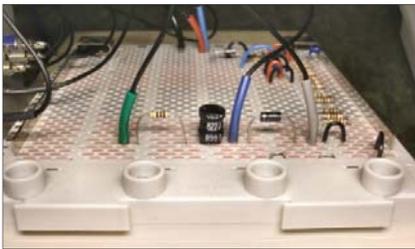


Abbildung 4 Foto der Schwingkreis-Bauelemente auf der Experimentierplatine Hirschmann XP101, v.l.  $R = 100 \text{ Ohm}$ ,  $L = 8,2 \text{ mH}$  und Diode 1N4007

Bei den in der Literatur beschriebenen Experimenten wird der Kreis in der Regel in der Nähe der Resonanzfrequenz betrieben, die sich bei kleiner Wechselspannungsamplitude einstellt<sup>3,4</sup> – offenbar beobachtet man die Periodenverdopplung dann (bei größerer Amplitude) besonders gut. Bei kleiner Wechselspannungsamplitude sperrt die Diode auch in Durchlassrichtung. Die Schaltung wird unter dieser Bedingung zu einem linearen  $RLC$ -Serienkreis mit konstanter Kapazität  $C$  und gut definierter Resonanzfrequenz  $f_r$ . Deshalb habe ich zunächst (bei kleiner Amplitude) die Resonanzkurve des Kreises aufgenommen. Abbildung 5 zeigt das Ergebnis. Das Maximum der Kurve liegt bei der Frequenz  $f_r = 132,4 \text{ kHz}$ . Ich wähle als Anregungsfrequenz den etwas kleineren »glatten« Wert  $100 \text{ kHz}$ , dessen Bruchteile Hälfte, Viertel, Achtel usw. man im Spektrum (weiter unten) bequem ablesen kann. Mit Blick auf die später betrachteten Subharmonischen nenne ich die entsprechende Schwingung die »Grundschiwingung« und ihre Frequenz  $f_1$  (also  $f_1 = 100 \text{ kHz}$ ).

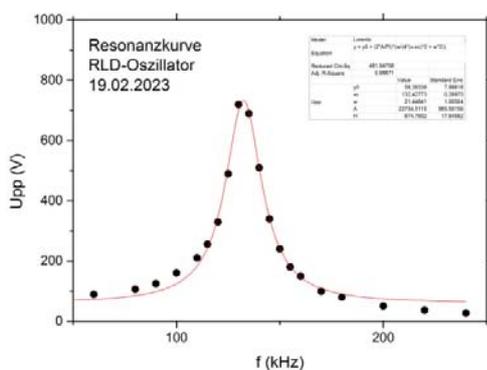


Abbildung 5 Resonanzkurve des RLD-Schwingkreises bei sehr kleiner Anregungsamplitude. Resonanzfrequenz  $f_r = 132,4 \text{ kHz}$

Aus der Resonanzfrequenz  $f_1 = 132,4 \text{ kHz}$  übrigens folgt<sup>10</sup> als Kapazität der in Sperrrichtung betriebenen Diode  $C = 176 \text{ pF}$ , ein überraschend großer Wert.

#### 4. Demonstration der Periodenverdopplung

Nach dieser Bemerkung zur Wahl der Anregungsfrequenz zurück zur Demonstration von Periodenverdopplung und Chaos: Wir variieren die Anregungsspannung  $U$  und betrachten dabei den zeitlichen Verlauf der Diodenspannung  $U_D$  (Die Spannungen  $U$  und  $U_D$  bitte nicht verwechseln,  $U$  wird als *rms*-Wert angegeben, Zahlenwerte von  $U_D$  interessieren nicht). Bei sehr kleiner Anregungsspannung  $U$  ist die Diode, wie schon erwähnt, nichtleitend – das ist der Zustand, in dem auch die vorhin beschriebene Resonanzkurve gemessen wurde. Die Diodenspannung ist sinusförmig und hat dieselbe Frequenz wie  $U$ , also  $f_1 = 100$  kHz. Erhöht man die Amplitude von  $U$ , setzt ab etwa 0,6 V Spitzenspannung die Gleichrichterwirkung der Diode ein. Jetzt sind nur noch die Spannungspeaks während der Durchlassphase zu sehen, dazwischen zeigt sich die Nulllinie. In diesem Bereich der Anregungsamplituden beobachtet man die hier interessierende Periodenverdopplung.

Abbildungen 6a) bis 6c) zeigen drei Beispiele. Die Diodenspannung  $U_D$  ist jeweils in der unteren Hälfte der Abbildung dargestellt, die obere Hälfte enthält eine Sinuskurve der Frequenz 100 kHz. Sie hat dieselbe Frequenz wie die Anregungsspannung und dient als Zeitmarkengeber: Maxima (Minima) folgen im zeitlichen Abstand von  $1/100$  kHz =  $10$   $\mu$ s.

Abbildung 6a) zeigt den Fall einer Anregungsspannung  $U$  nur wenig oberhalb der Gleichrichterschwelle der Diode. Wie erwartet, ist der zeitliche Abstand benachbarter Durchlasspeaks gleich dem Abstand aufeinander folgender Maxima der 100 kHz-Schwingung. Die Periode von  $U_D$  beträgt also  $T_1 = 10$   $\mu$ s. Erhöht man  $U$ , beginnen sich die Spannungsspitzen in ihrer Höhe zu unterscheiden: Ab  $U \approx 0,5$  V hat nur jede zweite Spitze die gleiche Höhe. Abbildung 6b) zeigt die Diodenspannung für diesen Fall. Jetzt ist zusätzlich zur Periode  $T_1$  eine Periode mit  $T_2 = 20$   $\mu$ s entstanden: gleich hohe Peaks folgen erst im zeitlichen Abstand von  $20$   $\mu$ s aufeinander. Im Frequenzspektrum ist  $T_2$  als Peak bei der Frequenz  $f_2 = 1/T_2 = 1/20$   $\mu$ s =  $50$  kHz sichtbar. Bei noch höherer Spannung  $U$  treten nacheinander weitere Periodenverdopplungen auf. Ab  $U \approx 1,2$  V sind vier Perioden zu erkennen. Dieser Fall – die Perioden sind  $T = 10$   $\mu$ s,  $20$   $\mu$ s,  $40$   $\mu$ s und  $80$   $\mu$ s – wird in Abbildung 6c) dargestellt. Kurz darauf, bei  $U \approx 1,3$  V, entstehen acht Perioden, usw. Nur wenig oberhalb von  $U \approx 1,3$  V wird die Schwingung chaotisch.

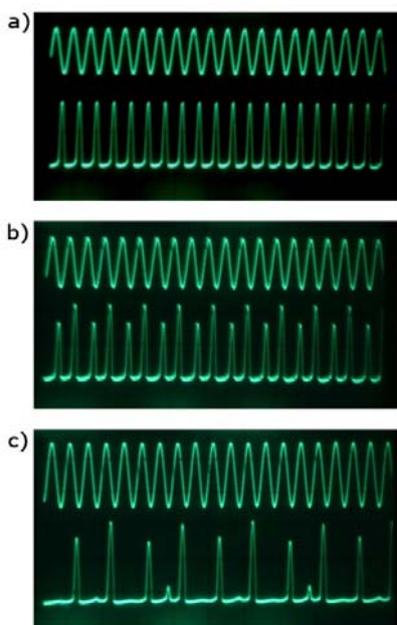


Abbildung 6 Demonstration der Periodenverdopplung: Oszillogramme der Diodenspannung  $U_D$  bei verschiedenen Amplituden der Anregungsspannung  $U$ . Die Diodenspannung  $U_D$  in der jeweils unteren Bildhälfte, darüber eine 100 kHz-Sinusschwingung als Zeitmarkengeber (zeitlicher Abstand aufeinander folgender Maxima bzw. Minima =  $10$   $\mu$ s). a)  $U$  kurz oberhalb der Gleichrichterschwelle der Diode 1N4007:  $U_D$  mit einer (einzigen) Periode  $T_1 = 10$   $\mu$ s. b)  $U$  zwischen  $\approx 0,5$  V und  $\approx 1,2$  V:  $U_D$  mit zwei Perioden  $T_1 = 10$   $\mu$ s und  $T_2 = 20$   $\mu$ s. c)  $U > \approx 1,2$  V, aber unterhalb der Chaos-Schwelle:  $U_D$  mit vier Perioden  $T_1 = 10$   $\mu$ s,  $T_2 = 20$   $\mu$ s,  $T_3 = 40$   $\mu$ s und  $T_4 = 80$   $\mu$ s.

In Abbildung 7 sind die nacheinander durchlaufenen Zustände mit jeweils doppelter Periode in der Form von Frequenzspektren dargestellt. Das oberste Spektrum entspricht der Grundschwingung mit  $f_1 = 100$  kHz, der zugehörige Peak ist am rechten Rand des Koordinatensystems sichtbar. Die sich nach unten anschließenden Diagramme zeigen Spektren mit Subharmonischen der Grundschwingung. Die Linie bei 16,7 kHz könnte eine Oberwelle des Bahn-Wechselstroms mit  $f = 16,7$  Hz sein. Sie lässt sich offenbar nicht vermeiden und taucht in allen Spektren auf.

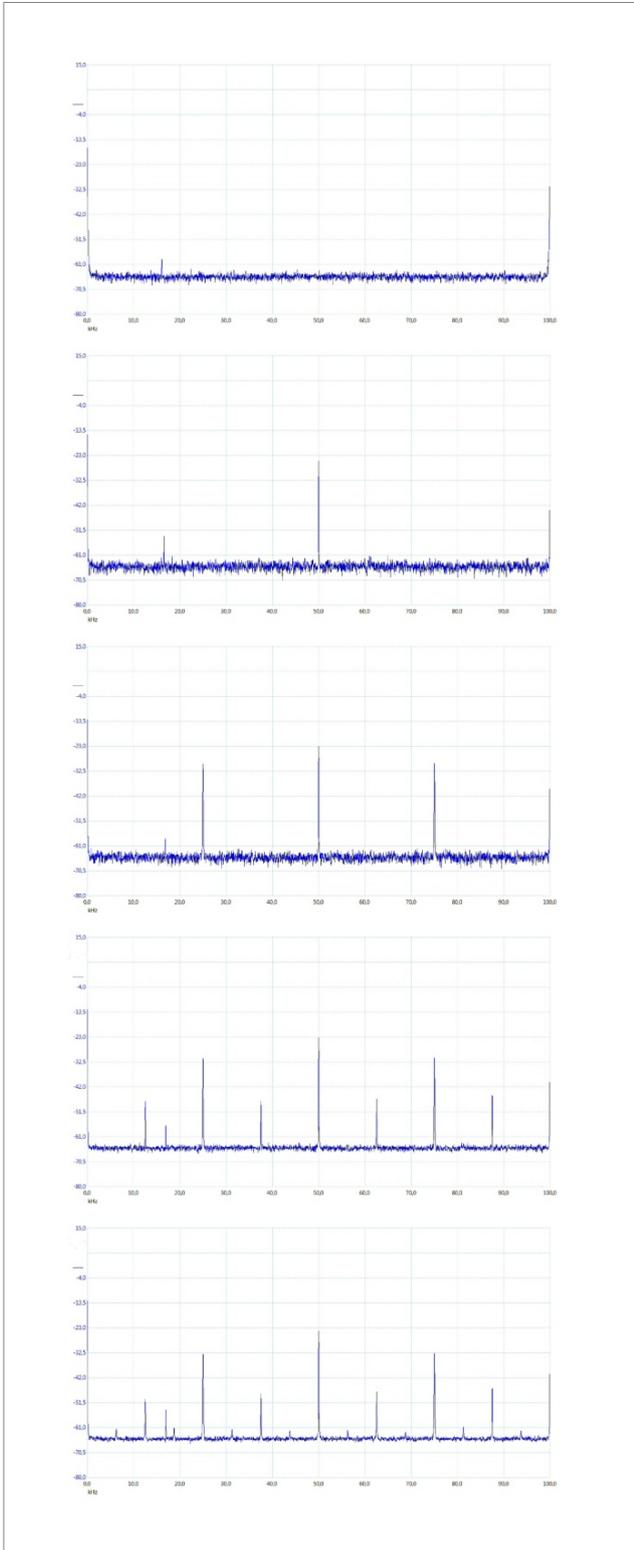


Abbildung 7 Periodenverdopplung im Frequenzspektrum der Diodenspannung  $U_D$ . Die Verdopplung erfolgt durch fortlaufende Erhöhung der Amplitude der am Kreis anliegenden Wechselspannung, siehe Text. Die in allen Spektren sichtbare Linie bei 16,7 kHz könnte eine Oberwelle des Wechselstroms der Bahn (16,2/3 Hz) sein.

Die Abbildung zeigt, dass sich mit jeder Verdopplung der Periode auch die Anzahl der Harmonischen um den Faktor zwei erhöht. Beispielsweise gehört zur oben erwähnten Schwingung mit den Perioden  $10\ \mu\text{s}$  und  $20\ \mu\text{s}$  das zweitoberste Spektrum mit den Peaks bei  $100\ \text{kHz}$  und  $50\ \text{kHz}$ , das sind zwei Frequenzen. Die auch schon genannte Schwingung mit vier Perioden ( $10\ \mu\text{s}$ ,  $20\ \mu\text{s}$ ,  $40\ \mu\text{s}$  und  $80\ \mu\text{s}$ ) zeigt im Spektrum Linien bei  $100\ \text{kHz}$ ,  $50\ \text{kHz}$ ,  $25\ \text{kHz}$  und  $75\ \text{kHz}$ , enthält also vier Frequenzen im Abstand  $f_i/4 = 25\ \text{kHz}$ . Das Spektrum weiter unten in der Abbildung enthält 8 Linien im Abstand von  $f_i/8 = 12,5\ \text{kHz}$ , im untersten Spektrum sind 16 Linien mit dem Abstand  $f_i/16 = 6,25\ \text{kHz}$  zu sehen. Die zuletzt hinzu gekommenen Linien heben sich gerade noch vom Rauschen ab.

## 5. Messung des Feigenbaum-Quotienten $\delta$

Nach den Bemerkungen zur Periodenverdopplung nun zur Bestimmung der Spannungsschwellen  $U_S$  und den nach Gleichung (3) berechneten Werten von  $\delta$ . Eine Periodenverdopplung geht einher mit dem Entstehen neuer Subharmonischen, im Spektrum also mit Linien, die sich aus dem Rauschen zwischen schon sichtbaren Linien hervorzuheben beginnen. Es ist schwierig, den Zustand des Entstehens zu erkennen. Deshalb sind die gemessenen Werte von  $U_S$  mit nicht unerheblichen Fehlern behaftet, die sich in den Differenzen des Terms für  $\delta$  auch noch arithmetisch addieren. Tabelle 3 zeigt das Ergebnis der Messungen. Die Werte von  $U_S$  sind Mittelwerte von sechs Einzelmessungen, als Fehler wurde die Abweichung des am weitesten vom Mittelwert entfernten Einzelwertes angegeben.

Schwelle	$U_S/V$	$\Delta U_S/V$	$\delta$
$f_1 \rightarrow f_{1/2}$	$0,5444 \pm 0,0234$		
		$0,6285 \pm 0,0395$	
$f_{1/2} \rightarrow f_{1/4}$	$1,1730 \pm 0,0161$		$4,62 \pm 1,14$
		$0,1359 \pm 0,0248$	
$f_{1/4} \rightarrow f_{1/8}$	$1,3088 \pm 0,0087$		$6,0 \pm 5,1$
		$0,0227 \pm 0,0150$	
$f_{1/8} \rightarrow f_{1/16}$	$1,3315 \pm 0,0063$		

Tabelle 3 Schwellenspannungen  $U_S$ , deren Differenzen  $\Delta U_S$  und die Quotienten  $\delta$  dieser Differenzen, berechnet nach Gleichung (3). Der Wert  $\delta_1 = 4,62$  ist innerhalb seines Fehlers (25 %) mit dem theoretischen Wert vertäglich, beim Wert  $\delta_2 = 6,0 \pm 5,1$  stimmt immerhin die Größenordnung.

Der Wert  $\delta_1 = 4,62 \pm 1,14$  ist innerhalb seines Fehlers (25 %) in Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert (Tabelle 2), beim Wert  $\delta_2 = 6,0 \pm 5,1$  stimmt immerhin die Größenordnung. Dieses Ergebnis ist, verglichen mit den professionell bestimmten Zahlenwerten, ernüchternd: In der Literatur wird beispielsweise für  $\delta_1$  ein Fehler von 2 %, für  $\delta_2$  ein Fehler von 13 % angegeben<sup>3</sup>.

Fazit: Auf den ersten Blick ist das Experiment einfach, sowohl was den Aufbau betrifft als auch die Messung. Andererseits sind die Zahlenwerte der Feigenbaum-Quotienten  $\delta$  offenbar schwierig zu messen. In einem Hobby-Experiment kann man sie m. E. nicht genauer als hier beschrieben bestimmen.

## Literatur und Anmerkungen

- <sup>1</sup> M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. 19, 25 (1978).
- <sup>2</sup> M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. 21, 665 (1978).
- <sup>3</sup> Paul S. Lindsay, Phys. Rev. Letters 47, 1349 (1981).
- <sup>4</sup> James Testa, José Pérez und Carson Jeffries, Phys. Rev. Letters 48, 714 (1982).
- <sup>5</sup> R. W. Rollins und E. R. Hunt, Phys. Rev. Letters 49, 1296 (1982).

<sup>6</sup> Werner Lauterborn und Werner Meyer-Ilse, Physik in unserer Zeit 17, 177 (1986).

<sup>7</sup> In der Literatur wird diskutiert<sup>8,9</sup>, ob Periodenverdopplung und Chaos im vorliegenden Experiment darauf zurückzuführen sind, dass die Sperrrichtungs-Kapazität der Diode eine nichtlineare Funktion der Sperrspannung ist oder andere Ursachen hat. Als andere Ursache kommt in Frage, dass die Diode vom Zustand »leitend« zum Zustand »sperrend« verzögert umschaltet. Das heißt, sie leitet auch noch eine kleine Zeitspanne nachdem die an ihr anliegende Spannung von Durchgang auf Sperren wechselt. Das wird durch numerische Simulationen<sup>5</sup> nahegelegt.

<sup>8</sup> E. R. Hunt, Phys. Rev. Letters 49, 1054 (1982).

<sup>9</sup> J. Testa et al., Phys. Rev. Letters 49, 1055 (1982).

<sup>10</sup>  $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  (Thomsonsche Formel)